

Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro

Juan Luis Prieto González y Julia Valls González

Resumen: Esta investigación tiene como objetivo caracterizar la manera como los estudiantes para maestro instrumentalizan los significados de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva para la planificación de la enseñanza. El análisis de sus participaciones en un debate en línea muestra diferentes maneras de usar los significados y pone de manifiesto las dificultades inherentes al establecimiento de relaciones entre los tipos de problemas y el pensamiento matemático de los estudiantes. Al final, se discuten diferentes factores que parecen incidir en la instrumentalización de la información en un contexto interactivo en línea como una característica del aprendizaje de conocimientos necesarios para enseñar matemáticas en primaria.

Palabras clave: aprender a enseñar, instrumentalización, interacción, problemas de estructura aditiva, estudiantes para maestro, debates en línea, metodología *b-learning*.

Learning of characteristics of elementary arithmetic problems in additive structure for pre-service primary teachers

Abstract: The aim of this research is to characterize the way how pre-service primary teachers instrumentalize the meanings of addition and subtraction word problems for the planning of teaching. The analysis of their contributions in an online discussion shows different ways to use the meanings and highlights the difficulties inherent in establishing relationships between the types of problems and mathematical thinking of children. Finally, we discuss various factors that seem to influence on the instrumentalization of information in an online interactive context as a feature of learning the knowledge needed to teach mathematics in primary school.

Keywords: learning to teach, instrumentalization, interaction, additive word problems, pre-service primary teachers, online discussions, b-learning methodology.

Fecha de recepción: 1 de abril de 2009.

INTRODUCCIÓN

Los investigadores en educación matemática están empezando a caracterizar la manera como los estudiantes para maestro de primaria aprenden los conocimientos de Didáctica de la Matemática necesarios para enseñar (Llinares y Krainer, 2006). Algunas aproximaciones al aprendizaje del conocimiento necesario para enseñar matemática se fundamentan en perspectivas situadas que consideran inseparables el contexto donde se produce el aprendizaje y la manera en la que éste se adquiere (Hiebert *et al.*, 2007; Hiebert, Gallimore y Stigler, 2002; Wilson y Berne, 1999). Un foco de interés en este tipo de investigaciones se sitúa en el análisis de la resolución de tareas profesionales en entornos de aprendizaje especialmente diseñados donde los estudiantes para maestro pueden interaccionar y hacer uso de información teórica de Didáctica de la Matemática que se considera útil para enseñar matemáticas (Bairral, 2007; Llinares y Valls, 2007; Llinares, Valls y Roig, 2008; McGraw *et al.*, 2007; Tsamir, 2008).

Desde esta perspectiva, el *conocimiento* necesario para enseñar matemática se relaciona con las *capacidades* de identificar y dotar de significado a aspectos de la práctica (Martínez, 2005; Penalva, Escudero y Barba, 2006; Van Es y Sherin, 2002) durante la resolución de tareas profesionales vinculadas con la enseñanza de la matemática (diagnóstico, planificación y gestión de la enseñanza) (Llinares, Valls y Roig, 2008). En los contextos donde se da este aprendizaje, las interacciones de los participantes se han mostrado como un factor relevante, al favorecer la incorporación de información de Didáctica de la Matemática en sus estructuras de pensamiento (Azcárate, Rodríguez y Rivero, 2007; Cos, Valls y Llinares, 2005). En este sentido, algunas intervenciones en los programas de formación han incorporado herramientas tecnológicas para potenciar la comunicación e interacción entre los estudiantes, generándose cuestiones de investigación sobre la influencia de estos contextos en los procesos de aprendizaje (Llinares y Olivero, 2008; Mousley, Lambdin y Koc, 2003). Una cuestión de investigación que se plantea es llegar a conocer los efectos que sobre el aprendizaje producen las interacciones en línea de estudiantes para maestro cuando resuelven tareas profesionales y que se manifiestan en el contenido de sus discursos. Otro de los focos de interés se centra en las características de los contextos formativos. Desde esta perspectiva, algunas investigaciones subrayan la importancia de los contextos en los que los estudiantes para maestro resuelven tareas y cómo influyen estos contextos en la construcción de conocimiento necesario para enseñar (Callejo, Valls, y Llinares, 2007; Llinares y Krainer, 2006; Morris, 2006; Tsamir,

2007; Valls, Callejo y Llinares, 2008). Los resultados de estas investigaciones han tenido implicaciones en el diseño de diferentes experiencias formativas del profesorado que promuevan el uso instrumental de contenidos de Didáctica de la Matemática estructurados en entornos de aprendizaje mediados por la comunicación en línea (Cos, Valls y Llinares, 2005; García *et al.*, 2006; Callejo, Llinares y Valls, 2008; Llinares y Valls, 2007; Rey, Penalva y Llinares, 2006).

Un contenido específico para los estudiantes para maestro lo constituye el conocimiento de las características de los *problemas aritméticos elementales* (PAE): categorización de los problemas, niveles de dificultad y posibles estrategias de resolución (Castro, Rico y Castro, 1995; Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Puig y Cerdán, 1988; Socas, Hernández y Noda, 1998). En relación con los PAE de estructura aditiva, la investigación en educación matemática ha identificado diferentes maneras de categorizar los problemas que involucran la adición y la sustracción (Vergnaud, 1997; Verschaffel y De Corte, 1996). Una categorización ampliamente difundida de estos problemas considera las relaciones semánticas entre las cantidades presentes en el enunciado, lo que ha llevado a distinguir tres categorías básicas: problemas de cambio (algún evento cambia el valor de una cantidad inicial), de combinación (un conjunto particular y dos subconjuntos disjuntos de él se relacionan entre sí) y de comparación (se comparan dos cantidades y la diferencia entre ellas) (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Verschaffel y De Corte, 1996). A su vez, se subdivide cada categoría dependiendo de la incógnita en el problema. Por ejemplo, un problema de cambio puede variar según si la incógnita es la cantidad inicial, la cantidad de cambio o la cantidad final. Además, se han establecido distinciones entre problemas de cambio o comparación, según sea la dirección del cambio producido o las relaciones de comparación que se establecen (creciente o decreciente). Otro de los aspectos estudiados de los PAE de estructura aditiva se refiere a su *nivel de dificultad* o a las *estrategias de resolución* usadas por los alumnos (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Verschaffel y De Corte, 1996). La dificultad de los PAE de estructura aditiva suele atribuirse a su estructura semántica y al lugar que ocupa la incógnita en el problema (Bermejo y Oliva, 1987). En cuanto a las estrategias de resolución de estos problemas, Carpenter, Moser y Romberg (1982) encontraron que, en general, los niños *modelan* directamente la acción o relación descrita en el problema y, con el tiempo, utilizan sus conocimientos sobre los recuentos (*el conteo*) y el recordar *hechos numéricos* concretos como abstracciones de la modelación directa más eficientes para resolver los problemas.

Desde esta perspectiva, el conocimiento sobre las características de los PAE se considera relevante para enseñar matemáticas en Educación Primaria y, por

tanto, ha empezado a ser considerado objeto de aprendizaje para los estudiantes para maestro. En este sentido, algunas investigaciones sobre el aprendizaje de las características de los PAE de estructura aditiva con maestros en ejercicio (Carpenter *et al.*, 1989; Fennema *et al.*, 1996) identificaron las relaciones que establecen éstos entre el conocimiento del desarrollo del pensamiento matemático de los niños en relación con los PAE de estructura aditiva y su práctica instruccional. Los resultados de estas investigaciones indican que el conocimiento de la información sobre los diferentes tipos de problemas, las estrategias usadas por los niños de primaria para resolverlos y cómo evolucionan estas estrategias producía cambios en la práctica instruccional de los maestros. Estas conclusiones son importantes desde el punto de vista de la formación inicial de maestros en cuanto que proporcionan la base para que los estudiantes para maestro desarrollen su conocimiento con mayor amplitud (Carpenter, Fennema y Franke, 1996).

Sin embargo, poco se conoce sobre la manera como los estudiantes para maestro aprenden las características de los PAE de estructura aditiva durante su formación universitaria. En particular, en España se han desarrollado estudios centrados en, al menos, tres focos de interés. Por un lado, el aprendizaje de estos tópicos ha sido analizado desde la perspectiva de los “cambios” en las concepciones de los estudiantes para maestro sobre las características de los PAE de estructura aditiva durante su participación en experiencias formativas diseñadas *ad hoc* (Cos y Valls, 2006). Por otro lado, el aprendizaje se ha relacionado con la capacidad de identificar la estructura subyacente de distintos tipos de PAE de estructura aditiva con números negativos (Bruno y García, 2004) y de estructura multiplicativa (Castro y Castro, 1996), con énfasis en la dificultad que representa esta tarea para los estudiantes para maestro. Y por último, se ha vinculado el aprendizaje de las características de los PAE con las posibles relaciones que construyen los estudiantes para maestro entre la teoría procedente de la Didáctica de la Matemática y las evidencias que se observan en el contenido de los problemas que les son propuestos (García *et al.*, 2006). Estas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes para maestro en dotar de significado a las características semánticas de estos problemas.

En estos contextos, la introducción de espacios de aprendizaje alternativos en los programas de formación permite generar cuestiones sobre el aprendizaje de estas ideas por parte de los estudiantes para maestro. Nuestra investigación tiene como objetivo caracterizar la manera en que un grupo de estudiantes para maestro de primaria aprende a conceptualizar la enseñanza de la resolución de PAE de estructura aditiva de una etapa mediante el uso de información teórica en contextos de comunicación en línea.

EL PROCESO DE APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Las perspectivas situadas del aprendizaje permiten entender la enseñanza de las matemáticas como una *práctica* que puede ser aprendida y comprendida (Llinares, 2004). Desde esta perspectiva, aprender a enseñar matemáticas se entiende como un proceso de *dotar de significado* a la experiencia profesional. Según Wenger (2001), este proceso de dotar de significado a la experiencia profesional se sitúa en contextos sociales de *negociación de significados*, donde tiene lugar la participación mediada por *instrumentos* de la práctica. Los instrumentos de la práctica son cualquier medio, ya sea material o simbólico, que busca potenciar la acción de los sujetos que realizan tareas específicas (Llinares, 2004; Verillon y Rabardel, 1995).

Teniendo en cuenta estas referencias teóricas, consideramos que los estudiantes para maestro pueden dotar de significado a la enseñanza de la resolución de problemas en primaria cuando participan en entornos de aprendizaje diseñados para analizar el potencial didáctico de los problemas aritméticos. El contexto de análisis de estos problemas crea condiciones para que los estudiantes para maestro usen información teórica desde diferentes dominios: *conocimiento de las matemáticas*, *conocimiento de las matemáticas escolares* y *conocimiento pedagógico específico de las matemáticas* (Llinares, Valls y Roig, 2008; Rey, Penalva y Llinares, 2006). Al inicio de las situaciones formativas, las decisiones y acciones de los estudiantes para maestro pueden estar influidas por conocimientos previos sobre la manera de proponer PAE a niños de primaria (Azcárate y Castro, 2006). Sin embargo, este conocimiento puede transformarse en un conocimiento más profesionalizado mediante la integración progresiva de la información de Didáctica de la Matemática potencialmente útil para el análisis de los problemas. Esta transformación se entiende como un proceso de *instrumentalizar la información teórica* incorporada a los contextos formativos en los que se resuelven tareas propias de un maestro de primaria y se negocian significados.

La instrumentalización de la información de Didáctica de la Matemática implica un proceso de *reificación* y de *participación* en una determinada comunidad de práctica (Wenger, 2001). La dualidad entre el proceso de reificación y la participación, según Wenger (2001), puede permitir el desarrollo de la comprensión de la experiencia de enseñar matemáticas en términos de la información teórica que se integra en las estructuras de conocimiento profesional de los estudiantes para maestro en forma de *instrumentos conceptuales*. Los instrumentos conceptuales se entienden como conceptos y construcciones teóricas, originadas por la inves-

tigación en Didáctica de la Matemática, que permiten interpretar y comprender las situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática, facilitando la toma de decisiones en cuanto a la manera de tratar dichas situaciones para lograr objetivos instruccionales (García *et al.*, 2006; Lin, 2005; Llinares, 2004).

En esta investigación, para caracterizar el aprendizaje de un grupo de estudiantes para maestro de primaria, usamos la idea de instrumentalización de las ideas teóricas de Didáctica de la Matemática, entendida como las relaciones que establecen los estudiantes para maestro entre una categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, los niveles de dificultad y las estrategias de resolución (Castro, Rico y Castro, 1995), como una manera de determinar criterios útiles para la tarea de planificar la enseñanza. El uso de información teórica durante el análisis del potencial de los PAE de una etapa en la planificación de la enseñanza es una manifestación de la transformación de la teoría en instrumentos conceptuales útiles en la práctica de enseñar matemática (Eraut, 1996; García *et al.*, 2006). En este sentido, asumimos que la instrumentalización de la información de Didáctica de la Matemática se puede producir en contextos sociales de negociación de significados, manifestándose por medio de las *interacciones* producidas por los estudiantes para maestro cuando resuelven una tarea profesional, como es la planificación de la enseñanza (Rey, Penalva y Llinares, 2006).

Desde esta perspectiva, en contextos mediados por la comunicación en línea, entendemos las interacciones como el producto de actividades discursivas de negociación de significados en torno a tópicos compartidos de discusión (Barberá, Badia y Mominó, 2001). Así, en los espacios de debate en línea, la participación de los estudiantes para maestro adquiere la forma de *discursos* en los que se expresan argumentos y se negocian significados adscritos a la clasificación y resolución de los PAE de estructura aditiva de una etapa y las dificultades de aprendizaje derivadas ante la tarea de planificar la enseñanza. Estos discursos pueden llegar a reflejar los diferentes usos de la información de Didáctica de la Matemática en la resolución de tareas de planificación (Rey, Penalva y Llinares, 2006) y, por tanto, pueden indicar rasgos del aprendizaje de los estudiantes para maestro.

Las referencias teóricas anteriores hacen surgir cuestiones de investigación relativas a la manera cómo los estudiantes para maestro construyen argumentos en debates en línea cuando analizan PAE de estructura aditiva de una etapa desde una perspectiva semántica con el objetivo de planificar la enseñanza. En esta investigación, nos planteamos la siguiente pregunta: *¿Cómo instrumentalizan la información teórica de Didáctica de la Matemática los estudiantes para maestro*

cuando analizan PAE de estructura aditiva de una etapa ante la tarea de planificar la enseñanza en un contexto en línea?

Para dar respuesta a esta pregunta i) identificamos los *distintos usos* que hacen los estudiantes para maestro de la información teórica cuando analizan una colección de PAE de estructura aditiva, y ii) describimos las *diferentes situaciones de negociación* en un contexto en línea, producidas para dar respuesta a la tarea de la planificación de la enseñanza.

CARACTERÍSTICAS DEL ENTORNO DE APRENDIZAJE EN LÍNEA

Esta investigación se enmarca en la aplicación de un *entorno de aprendizaje* en línea en un programa de formación de maestros de Educación Primaria. El entorno de aprendizaje fue diseñado para abordar el análisis didáctico de los problemas y la resolución de problemas en primaria utilizando una aproximación metodológica *b-learning*. La estructura del entorno de aprendizaje constaba de cuatro partes, una parte presencial y tres partes en línea. Cada una de las partes en las que estaba estructurado el entorno de aprendizaje recibe el nombre de “sesión” para indicar que estaba constituida por un objetivo de aprendizaje, una serie de tareas, un espacio de interacción y un canal de entrega de documentos por parte de los estudiantes para maestro (Valls, Llinares y Callejo, 2006). Cada sesión tenía una duración variable en número de días (de 8 a 15 días).

Los datos de esta investigación proceden de los textos elaborados por los estudiantes para maestro durante su participación en la segunda parte en línea (sesión en línea 2). Esta sesión tenía como objetivo que los estudiantes para maestro aprendieran a identificar la estructura semántica de los problemas aditivos, los niveles de dificultad y las estrategias de resolución de estos problemas por parte de los alumnos de Educación Primaria. En esta sesión los estudiantes para maestro debían realizar i) *una tarea*, que se describirá a continuación, y participar en ii) *un debate en línea* para la comunicación de las ideas y el establecimiento de acuerdos en relación con la resolución conjunta de la tarea. Este debate fue pensado como un espacio que favoreciera la interacción entre los estudiantes para maestro. El desarrollo de esta parte del entorno de aprendizaje se llevó a cabo a través de la plataforma web de la universidad, a la cual los estudiantes para maestro podían tener acceso mediante una clave de acceso personalizada (*password*) (figura 1).

Figura 1 Ventana de introducción a la sesión en línea 2 del entorno de aprendizaje

S2: Los PAEs como método para la formación del concepto de adición y sustracción
II (NO activa) [2]

100 min.

Esta sesión es continuación de la sesión 1 y forma parte de un grupo de tres sesiones que tienen como objetivo introducirnos en la Resolución de Problemas en Primaria como medio de aprendizaje y enseñanza

Objetivos

- Reconocer y usar la estructura semántica de los PAE de estructura aditiva de un paso para clasificar los problemas
- Identificar diferentes niveles de dificultad de los PAE de estructura aditiva de un paso
- Identificar y reconocer diferentes estrategias de resolución para los PAE de estructura aditiva de un paso

Tarea

A partir del análisis de los PAE de estructura aditiva de un paso propuesta en la Sesión 1 por vuestro grupo de debate

- Clasificar los PAE de dicha lista usando criterios semánticos
- Ordenados según la dificultad que presentan, justificando vuestras decisiones
- Indicar para cada problema dos posibles estrategias que utilizarían los niños para resolverlos antes de utilizar los algoritmos de las operaciones ("las cuentas")

Datos de la Tarea

Los participantes en cada uno de los debates tendrán como datos de la tarea propuesta en esta sesión 2 la Colección de PAES propuesta por cada uno de los Grupos en la Sesión 1:

[Colección de PAES Grupo 2 \(Intervalo M-Z\).doc.zip](#) (22,00 Kbytes) : Colección de Problemas presentados por el grupo M-Z

[COLECCION PAES GRUPO 1 \(INTERVALO A-L\).doc.zip](#) (85,00 Kbytes) : Colección de problemas de estructura aditiva elegidos por el grupo A-L en la sesión 1

Documentos desde donde argumentar la tarea

"Resolución de problemas como aprendizaje matemático" Resumen de: Brissiaud, R. (1993) El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos. Distribuciones Visor: Madrid, pp. 95-99, 161-162; Carpenter, T.P. et al. (1999) Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction. Portsmouth, NH: Heinemann.; Puig, L. et al. (1988) Problemas aritméticos escolares. Síntesis: Madrid.

[Resolucion problemas 3.Curso 2006-07.pdf.zip](#) (187,90 Kbytes) : Categorización de la Problemas Aritméticos Elementales (PAEs) de Estructura Aditiva de una sola etapa mediante el criterio "semántico"

Metodología

Para resolver la tarea debéis participar en el DEBATE que corresponda a vuestro apellido

- aportando vuestra respuesta a la tarea y dando la opinión sobre las aportaciones de los compañeros del grupo de debate
- consensuando una opinión general entre todos argumentándola y fundamentándola a partir de las ideas presentadas en el documento adjunto.

[Debate Sesión 2, Intervalo A-L \(DETENIDO\)](#)

[Debate Sesión 2, Grupo M-Z \(DETENIDO\)](#)

Duración






Esta sesión permanecerá activa desde el 23 de abril al 3 de mayo

La tarea propuesta consistía en analizar seis PAE de estructura aditiva procedentes de una colección elaborada previamente por los propios estudiantes (cuadro 1) en la primera parte en línea (sesión en línea 1) del entorno de aprendizaje. El análisis debía realizarse teniendo en cuenta la información teórica que se les proporcionaba en diferentes documentos. La tarea tenía tres apartados:

- clasificar los problemas de la colección usando criterios semánticos,
- ordenarlos según la dificultad que presentan, justificando las decisiones,

- c) indicar para cada problema dos posibles estrategias que utilizarían los niños para resolverlos antes de utilizar los algoritmos de las operaciones (“las cuentas”).

Cuadro 1 Problemas de la colección elaborada por los estudiantes en la sesión en línea 1

Nº	Enunciado del problema
1	Hola, soy Sara. Tengo un problema, ¿me puedes ayudar? Mi hermano y yo celebramos juntos nuestro cumpleaños y mi mamá quiere saber a cuántos niños hemos invitado. Aquí tienes nuestras listas de invitados: Invitados de Sara: Pepe, María, José y Laura. Invitados del hermano de Sara: Lucía, Toni, Laura, Sandra y Carmen. ¿Cuántos niños vendrán a nuestra casa?
2	En un bosque ha habido un incendio y se han quemado todos los árboles. María, Alberto y Estela están muy tristes porque ya no pueden jugar allí y han decidido volver a plantar algunos árboles. María planta 4, Alberto planta 3 y Estela planta también 3. ¿Cuántos árboles plantan en total?
3	El autobús que va hasta Santa Pola sale vacío de la estación. En la primera parada suben 9 personas. En la segunda parada suben 12 más. ¿Cuántos pasajeros hay ahora en el autobús?
4	En el corralito había 15 gallinas. Cuando el granjero volvió al corralito, vio que se habían escapado 6 gallinas. ¿Cuántas gallinas quedan en total en el corralito?
5	Clara tiene 15 años y Pedro tiene 11. ¿Cuántos años tiene Clara más que Pedro?
6	<p>Observar cuántos puntos deben conseguir los niños para ganar cada premio.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;">  5 puntos </div> <div style="text-align: center;">  24 puntos </div> <div style="text-align: center;">  45 puntos </div> <div style="text-align: center;">  77 puntos </div> <div style="text-align: center;">  11 puntos </div> </div> <p>Carmen tiene 49 puntos, ¿cuántos puntos le faltan para conseguir el patinete?</p>

La información proporcionada a los estudiantes para maestro consistía en:

- i) una categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa: cambio (creciente y decreciente), combinación (total y parte) y comparación (creciente y decreciente);
- ii) los niveles de dificultad en la resolución de estos problemas;
- iii) las estrategias comúnmente usadas por los alumnos de Educación Primaria para resolverlos: modelización, conteo y uso de hechos numéricos (Castro, Rico y

Castro, 1995; Carpenter, Moser y Romberg, 1982). La información proporcionada permitía a los estudiantes para maestro realizar el análisis de los problemas más allá de criterios informales e intuitivos.

Para resolver la tarea, los estudiantes para maestro participaron en un debate en línea que les permitía interactuar con sus compañeros, a fin de lograr acuerdos en relación con el análisis de los problemas desde la información de la Didáctica de la Matemática. Este debate en línea se mantuvo abierto durante 11 días continuos.

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

Los datos de esta investigación proceden de 9 estudiantes para maestro (7 mujeres y 2 hombres) de un total de 53 estudiantes en su primer año del programa de formación. Los 9 estudiantes formaban parte de uno de los dos grupos (G1) en los que fueron divididos los 53 estudiantes para maestro para participar en el entorno de aprendizaje en línea. Estos estudiantes, antes de participar en la sesión en línea 2 del entorno de aprendizaje, habían participado en la sesión presencial (40 horas) y en la sesión en línea 1 (13 días activa).

ANÁLISIS

Los datos de esta investigación corresponden a las participaciones de los 9 estudiantes para maestro en el debate de la sesión en línea 2. El cuadro 2 recoge el número total de mensajes emitidos por los estudiantes en el debate y su distribución temporal.

Cuadro 2 Número de aportaciones por cada día de debate en la sesión en línea 2

Días de debate activo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	Total
Número de aportaciones	4	9	11	1	6	4	7	19	6	20	0	87

El análisis realizado asume que la información teórica se incorpora progresivamente en la discusión y su uso se manifiesta en el contenido de los discursos (las aportaciones) de los estudiantes para maestro durante el debate en línea. Se ana-

liza el contenido de los discursos producidos en el debate en línea considerando la *dimensión epistémica* (Barberá, Badia y Mominó, 2001), en la que se toma en cuenta cómo construyen argumentos en correspondencia con el uso de la información teórica proporcionada y su relación con las evidencias empíricas aportadas.

En los mensajes emitidos, se identificaron distintas ideas expresadas por los estudiantes para maestro en forma de frases que constituyeron las *unidades de significado* (Strijbos *et al.*, 2006). Por ejemplo, la figura 2 muestra tres unidades de significado contenidas en el mismo mensaje producido por uno de los estudiantes para maestro.

Figura 2 Unidades de significado identificadas en un mensaje emitido por el estudiante 3

Según la estructura (Estudiante 3 - 11:00:21 29/04/27)

US. 1	<i>Estoy de acuerdo con la clasificación que habéis hecho (por ello no la voy a repetir).</i>
US. 2	<i>También estoy de acuerdo en que el problema 3 es de cambio creciente ya que nos encontramos con una acción descrita en el TIEMPO y la cantidad inicial (0 pasajeros) va aumentando y la cantidad final cambia.</i>
US. 3	<i>También me gustaría comentaros las dudas que he tenido en el problema 6. Estoy de acuerdo en que es de cambio creciente pero yo en un principio pensé que era de COMPARACIÓN, ya que Carmen tiene que comparar los puntos que tiene y los puntos para el patinete. Como básicamente tiene que comparar ambos puntos me decanté en un principio por esa estructura. Pero es cierto que en la pregunta del problema aparece la incógnita de “cantidad de cambio”. Así que estoy de acuerdo con vosotros. Un saludo.</i>

US. p: Unidad de significado número p; con $p = \{1, 2, 3\}$

Cada unidad de significado, considerada como una unidad de análisis, fue codificada tomando como referencia las cuatro categorías de uso de instrumentos conceptuales propuestas por García *et al.* (2006), que describen distintos usos de la información teórica de Didáctica de la Matemática por parte de los estudiantes para maestro en contextos de formación inicial (cuadro 3).

Este análisis permitió identificar en cierta medida el proceso de aprendizaje de algunos estudiantes para maestro al mostrar cómo sus aportaciones se trasladaban desde categorías retóricas a categorías de instrumentalización.

Además, los discursos generados en el debate en línea se organizaron mediante *cadena conversacionales*, entendidas como una secuencia de interacciones entre los estudiantes para maestro que debaten sobre un mismo tópico (Llinares y Valls, 2007). Por ejemplo, un tópico de discusión para los estudiantes puede ser “la categoría semántica de los PAE de estructura aditiva”. Cada cadena

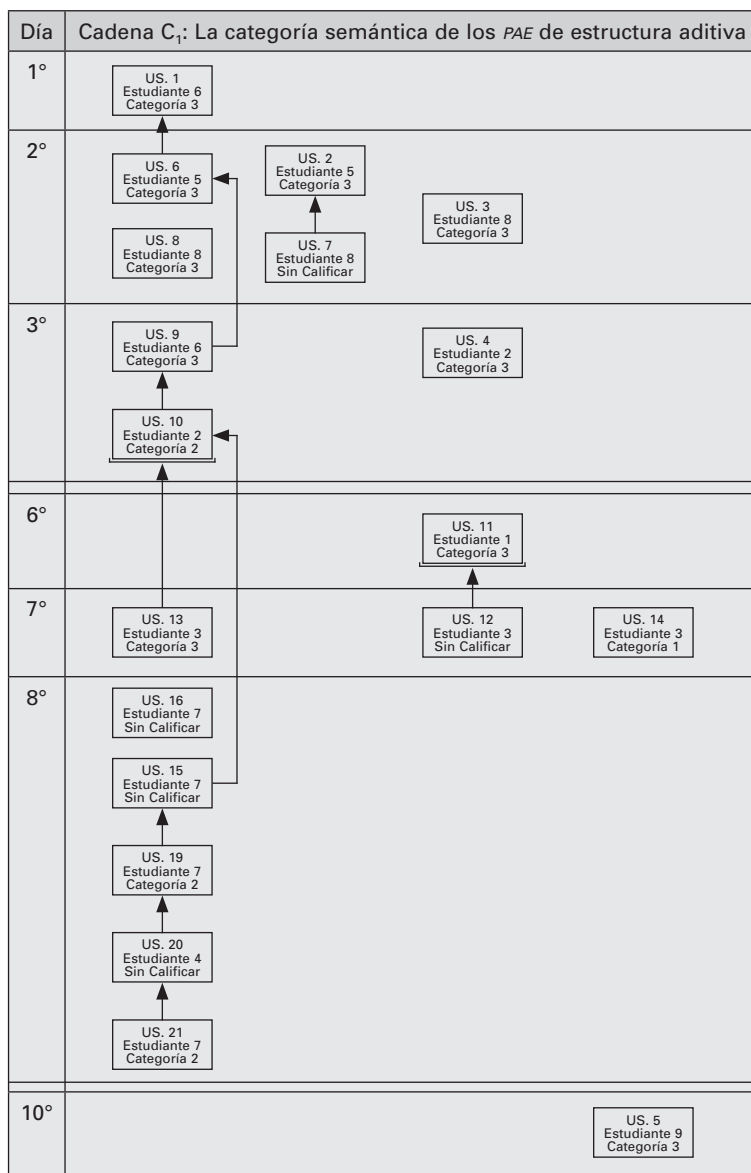
Cuadro 3 Categorías de uso de instrumentos conceptuales

Categoría	Descripción de la categoría
Categoría 1. Argumentos desde conocimientos previos	El estudiante para maestro realiza una descripción "natural" de algunos aspectos de los PAE de estructura aditiva desde su experiencia previa.
Categoría 2. Uso retórico de las ideas teóricas	El estudiante para maestro hace uso "retórico" de las ideas teóricas proporcionadas sin establecer relaciones entre estas ideas y las evidencias empíricas contenidas en los problemas de la colección: <i>acciones, estructura y/o cantidades presentes en los problemas.</i>
Categoría 3. Inicio de la instrumentalización de las ideas teóricas	El estudiante para maestro comienza a hacer uso instrumental de <i>una categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, los niveles de dificultad y/o las estrategias de resolución de estos problemas</i> , relacionándolas con las evidencias empíricas contenidas en los problemas de la colección.
Categoría 4. Uso integrado de las ideas teóricas como instrumentos conceptuales	El estudiante para maestro hace uso integrado de las ideas teóricas proporcionadas para analizar los problemas de la colección, relacionándolas en todo momento con las evidencias empíricas contenidas en estos problemas.

conversacional se representó en una gráfica que da información sobre los sujetos que toman parte en la negociación, cómo usan éstos las ideas teóricas para argumentar, la relación que establecen entre el contenido de los discursos producidos y el tiempo en la cual se produce (figura 3).

El análisis de las participaciones de los estudiantes para maestro en el debate se desarrolló en tres etapas. En la etapa 1, se llevaron a cabo reuniones entre los investigadores para dotar de significado a cada categoría de uso de instrumentos conceptuales desde los datos reunidos. Los investigadores analizaron conjuntamente una muestra de los mensajes para asignar los descriptores. Los criterios generados fueron aplicados luego de manera independiente por cada uno de los investigadores al total de los mensajes analizados. Se discutieron las discrepancias y la toma de decisión final fue consensuada. De esta manera, cada unidad de análisis se codificó en una de las cuatro categorías de uso de instrumentos conceptuales. En la etapa 2, se consideraron las distintas cadenas conversacionales. Cada cadena se representó gráficamente y se identificó el tópico que produjo la interacción. En la etapa 3, se consideró de manera global el uso instrumental de la información teórica en las diferentes cadenas conversacionales para describir cómo se produjo la instrumentalización.

Figura 3 Representación gráfica de una cadena conversacional (C_1) centrada en la categoría semántica de los PAE de estructura aditiva



RESULTADOS

Los resultados de esta investigación se describen en términos de los distintos usos que hicieron los estudiantes para maestro de la información teórica proporcionada para analizar los problemas de estructura aditiva, la caracterización de la negociación producida en el debate en línea y las relaciones entre la instrumentalización evidenciada y las situaciones donde este proceso tuvo lugar.

EL USO DE LA INFORMACIÓN TEÓRICA EN EL ANÁLISIS DE LOS PAE

El análisis del contenido de las participaciones de los estudiantes para maestro permitió identificar 92 unidades de significado de las 87 aportaciones al debate en línea y puso de manifiesto distintas maneras de usar la información teórica proporcionada para analizar los problemas (cuadro 4).

Cuadro 4 Categorías de uso de instrumentos conceptuales

	Núm. de us	% (*)
Categoría 1. Argumentos desde su experiencia previa	19	21
Categoría 2. Uso retórico de las ideas teóricas	44	48
Categoría 3. Inicio de la instrumentalización de las ideas teóricas	20	21
Categoría 4. Uso integrado de las ideas teóricas como instrumentos conceptuales	0	0
S/C	9	11
Total	92	100

us: Unidades de significado; S/C: Sin calificar; (*): Los porcentajes se han redondeado a un número entero.

En 21% de las unidades de significado, los argumentos de los estudiantes no se relacionan explícita o implícitamente con la información teórica proporcionada (categoría 1). En esta categoría, los estudiantes para maestro argumentan sus ideas sobre la base de su conocimiento previo. Por ejemplo, el estudiante 4, a raíz de una discusión sobre la dificultad de los PAE de estructura aditiva de una etapa, justifica sus argumentos en su conocimiento previo sobre la dificultad de esta clase de problemas vinculada a aspectos sintácticos del texto.

Respecto a la clasificación de dificultad (Estudiante 4 - 11:51:23 29/04/2007)

Yo también opino que **la dificultad** [de un problema] **se encuentra en el tipo de pregunta... ya que ahí es donde se fijan los niños, creo que es porque ellos mismos esperan que en la pregunta aparezca una “pista” que les indique cuál va a ser la operación que deben realizar.** En muchos casos los niños hacen mal los ejercicios porque no leen bien el enunciado fijándose sólo en la pregunta final.

Por otra parte, la mayoría de las unidades de significado (48%) revelan un uso “retórico” de la información teórica por parte de los estudiantes para maestro. Los estudiantes mencionan algunos términos de la teoría en la argumentación de sus ideas sin relacionarlos con el contenido de los problemas de la colección (categoría 2). Por ejemplo, el estudiante 5, para justificar el nivel de dificultad de los problemas, incorpora en su discurso términos tales como *problema de cambio creciente, decreciente y de combinación*, sin relacionarlos con los problemas que se estaban analizando. En cierta medida, el estudiante reprodujo la información teórica, pero no la usó para analizar los problemas.

Justificación de la ordenación (Estudiante 5 - 17:02:47 25/04/2007)

- Nivel 1. Son **problemas de cambio creciente o decreciente** cuya incógnita es la cantidad final, o problemas de combinación cuya incógnita es el total.
- Nivel 2. Es un problema **de cambio creciente**, pero la incógnita no es la cantidad final, sino la cantidad de cambio. Por este motivo, es un poco más complicado que los del nivel inferior.
- Nivel. Es un **problema de comparación** en el que se debe hallar la diferencia entre la cantidad de referencia y la cantidad comparada. No se trata de hallar totales ni cantidades de cambio.

Menos de la cuarta parte (21%) de las unidades de significado dan cuenta de un uso “instrumental” de la categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, de los niveles de dificultad y de las estrategias de resolución de estos problemas (categoría 3). Por ejemplo, el estudiante 10, al centrar su atención en la clasificación de los problemas, identifica los *problemas de cambio, combinación y comparación*, fijándose en el tipo de acciones o relaciones descritas en los enunciados, así como en las cantidades presentes.

Clasificación según la estructura (Estudiante 10 - 17:37:56 24/04/2007)

La estructura de los problemas es la siguiente:

PROBLEMA 1: presenta una estructura **de combinación**, pues no supone ninguna acción y se establecen **relaciones estáticas** entre **un conjunto que es el total de invitados y dos subconjuntos** disjuntos de él, esto es, **los invitados de Sara y los invitados de su hermano**. La incógnita es el total de invitados.

PROBLEMA 2: presenta una estructura de **combinación**, ya que no supone ninguna acción y existen **relaciones estáticas** entre el **número total de árboles y los árboles que planta cada niño**. La incógnita es el total de árboles plantados.

PROBLEMA 3: presenta una estructura **de cambio creciente**, pues describe una situación de **aumento**, ya que, al principio, **el autobús va vacío**, luego **suben 9 pasajeros y después 12 más**. La incógnita es la cantidad final de pasajeros que hay en el autobús.

PROBLEMA 4: tiene una estructura **de cambio decreciente**, pues describe una acción de **disminución**, pues de **15 gallinas** que había, **se escapan 6**. La incógnita es la cantidad final de gallinas que quedan.

PROBLEMA 5: tiene una estructura **de comparación creciente**, ya que **se comparan** dos conjuntos disjuntos, es decir, las **edades de Clara y Pedro**. La incógnita es la diferencia entre las dos edades.

PROBLEMA 6: presenta una estructura **de cambio creciente**, pues describe una acción de **aumento (de 49 puntos, cuántos puntos faltan hasta llegar a 77 puntos)**. La incógnita es la cantidad de cambio, puntos que le faltan para llegar a 77.

En cierta medida, el tipo de aportaciones de categoría 3 refleja la incorporación de la información de Didáctica de la Matemática relativa a la categoría semántica de los problemas aditivos en las estructuras de pensamiento de los estudiantes para maestro durante el análisis de los problemas. Sin embargo, las aportaciones en esta categoría reflejan el uso instrumental de la información teórica, cuanto más, en relación con dos de las características de los PAE de estructura aditiva –el tipo de problema, el nivel de dificultad y las estrategias de resolución usadas por los niños–; por ejemplo, a pesar de que los estudiantes pueden argumentar la dificultad de los problemas en relación con su estructura semántica, en ningún caso esta dificultad se relaciona con las estrategias de resolución.

Con respecto a la categoría 4, no se obtuvieron evidencias de que los estudiantes para maestro usaran de manera integrada las ideas de categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, niveles de dificultad y estrategias de resolución para analizar los problemas. A continuación, se muestra un ejemplo hipotético de una unidad de significado que puede ser considerada de categoría 4, en la que se justifica la necesidad de usar, para resolver el problema 3 (cuadro 1), hechos numéricos, dado el tamaño de los números implicados. Este tipo de aportación permite asumir que el estudiante centra su atención en la estructura semántica del problema, en las cantidades y en su dificultad relativa.

Ciertamente el problema 3 es de cambio creciente con incógnita en la cantidad final y no un problema de combinación. La clave está cuando se dice: “en la segunda parada suben 12 más”, que aumenta la cantidad de pasajeros del autobús. Sin embargo, no estoy de acuerdo en que la estrategia de resolución para resolverlo sea “juntar todo”, ya que una de las cantidades es mayor que 10, lo que aumenta su dificultad y hace propicio el uso de hechos numéricos, $12 = 10 + 2$. Incluso, esto me hace pensar en que el problema no debería ser usado al inicio de la clase, a pesar de ser de nivel 1, ya que la estrategia requiere una mayor demanda cognoscitiva.

Un 11% de las unidades de significado muestran ideas sin argumentar o sin relación con la resolución de la tarea, lo que ha impedido clasificarlas en alguna de las categorías y se han clasificado bajo el epígrafe *Sin calificar* (S/C).

CADENAS CONVERSACIONALES.

LA CARACTERIZACIÓN DE LA NEGOCIACIÓN PRODUCIDA EN EL DEBATE EN LÍNEA

Las participaciones en el debate en línea de los estudiantes para maestro, motivadas por la resolución de la tarea de analizar una colección de problemas aditivos, se organizaron en cuatro cadenas conversacionales (C_1 , C_2 , C_3 y C_4) (cuadro 5).

Los tópicos de las cadenas C_1 , C_2 y C_3 se corresponden con los tres apartados que describen la tarea: *tipos de problemas, niveles de dificultad y estrategias de resolución*. En estas cadenas, los estudiantes negociaron el significado de los problemas de cambio, combinación y comparación a partir de los problemas generados (C_1), establecieron acuerdos sobre los diferentes niveles de dificultad

Cuadro 5 Información sobre las cadenas conversacionales producidas en el debate en línea

Cadena	Tópico de discusión	Núm. de us	% (*)
C_1	La categoría semántica de los PAE de estructura aditiva	19	21
C_2	Dificultad de los de los PAE de estructura aditiva	31	34
C_3	Estrategias de resolución de los PAE de estructura aditiva	32	34
C_4	La resolución de problemas y el aprendizaje de la adición y la sustracción	7	8
us aisladas		3	3
Total		92	100

us: Unidades de significado; (*) Los porcentajes se han redondeado a un número entero.

C_i : Cadena conversacional i ; con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

de estos problemas (C_2) y dotaron de significado a las estrategias de modelación, conteo y uso de hechos numéricos como medios para resolver los problemas (C_3). Por su parte, el tópico de la cadena C_4 surgió de manera espontánea a lo largo del debate en línea y trató sobre el papel que desempeñan los PAE de estructura aditiva de una etapa en el aprendizaje de las nociones de adición y sustracción.

LA INSTRUMENTALIZACIÓN EN LAS CADENAS CONVERSACIONALES

El uso instrumental de la categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, los niveles de dificultad y las estrategias de resolución sólo se hizo presente en las cadenas C_1 , C_2 y C_3 . La mayoría de los estudiantes para maestro (8 de 9) que participaron en el debate en línea fueron capaces de producir unidades de significado de la categoría 3 durante al menos una de estas cadenas.

Por un lado, el cuadro 6 muestra que la mitad de las unidades de significado de la categoría 3 (10 de 20) se produce cuando los estudiantes para maestro identifican la acción o relación sobre las cantidades (datos e incógnita) en los enunciados para dotar de significado a los problemas de cambio, combinación y comparación de la colección. El otro 50% de las unidades de significado de esta categoría se genera durante el establecimiento de acuerdos sobre la dificultad relativa de los

Cuadro 6 Relación entre las cadenas conversacionales identificadas y el uso de la teoría

Cadena: tópico de discusión	Categoría 1 Argumentos desde conocimientos previos Núm. us (%*)	Categoría 2 Uso retórico de las ideas teóricas Núm. us (%*)	Categoría 3 Inicio de la instrumentalización de las ideas teóricas Núm. us (%*)	S/C Sin calificar Núm. us (%*)	Total Núm. us (%*)
C ₁ : la categoría semántica de los PAE de estructura aditiva	1 (5%)	3 (7%)	10 (50%)	5 (56%)	19 (21%)
C ₂ : dificultad de los de los PAE de estructura aditiva	9 (47%)	17 (39%)	4 (20%)	1 (11%)	31 (34%)
C ₃ : estrategias de resolución de los PAE de estructura aditiva	6 (32%)	20 (35%)	6 (30%)	0	32 (34%)
C ₄ : la resolución de problemas y el aprendizaje de la adición y la sustracción	3 (16%)	4 (9%)	0	0	7 (8%)
us aisladas	0	0	0	3 (33%)	3 (3%)
Total	19 (100%)	44 (100%)	20 (100%)	9 (100%)	92 (100%)

C_i: Cadena conversacional *i*; con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$; (*) Los porcentajes se han redondeado a un número entero.

problemas, teniendo en cuenta la relación semántica entre las cantidades de la situación y cuál es la incógnita, o mientras los estudiantes para maestro reconstruyen diferentes estrategias de modelación (juntar todo, añadir hasta, quitar, quitar hasta, correspondencia uno a uno), conteo (contar desde el primero, contar desde el mayor, contar hasta, conteo regresivo) y uso de hechos numéricos (uso de dobles y vuelta al cinco) como maneras de solucionar los problemas.

Por otro lado, se observa que la cadena C₁ sobre la categorización semántica de los PAE registra el menor número de aportaciones desde los conocimientos

previos (categoría 1) en comparación con las restantes negociaciones del debate en línea. Estos resultados revelan que las ideas relacionadas con la categorización de los problemas de estructura aditiva –de cambio, combinación y comparación–, en función de la acción o relación descrita en ellos, fueron las ideas teóricas mejor instrumentalizadas durante el análisis de los problemas. En cierto sentido, los estudiantes consideraron la categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa como elemento de conocimiento profesional para la planificación de la enseñanza. La aparente dificultad inherente a la instrumentalización de los niveles de dificultad de los PAE de estructura aditiva y las estrategias de resolución podría estar vinculada al hecho de que, para establecer los niveles de dificultad e identificar posibles estrategias de resolución, es necesario tener en cuenta varias variables, por ejemplo, la categorización semántica realizada y el tipo de estrategia que van a utilizar los niños, la cual depende de que éstos sean capaces o no de pensar globalmente en el problema, tanto en la acción descrita en el problema como en la pregunta que deben responder.

En contraste con lo anterior, se observa que en la cadena C_4 (la resolución de problemas y el aprendizaje de la adición y sustracción) no se produjeron unidades de significado de la categoría 3. Aunque en esta discusión los estudiantes para maestro hicieron un uso retórico de la información teórica proporcionada para establecer acuerdos entre ellos, éstos no vincularon las características de los PAE de estructura aditiva con los problemas analizados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Mediante esta investigación nos hemos aproximado al aprendizaje de un grupo de estudiantes para maestro desde la perspectiva de la instrumentalización de tópicos de la Didáctica de la Matemática durante la resolución de una tarea profesional, como es el análisis de problemas aritméticos de estructura aditiva con el objeto de planificar la enseñanza. Analizamos el contenido de los discursos producidos por los estudiantes en un debate en línea para conocer detalles de cómo se manifiestan el uso del conocimiento sobre la categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, los niveles de dificultad de estos problemas y las posibles estrategias de resolución de los niños de primaria cuando analizan una colección de problemas aditivos.

La manera cómo los estudiantes para maestro usaron la información teórica en las distintas situaciones de negociación es una señal del aprendizaje producido

durante el debate en línea. Consideramos que la instrumentalización de las características de los PAE de estructura aditiva de una etapa producida por los estudiantes para maestro durante el debate en línea es manifestación de una comprensión más amplia del conocimiento de los problemas y la resolución de problemas como medios de aprendizaje matemático en Educación Primaria. No obstante, se observaron diferencias en el grado de instrumentalización de estos tópicos, con un mayor énfasis en el uso instrumental de las tres categorías de problemas: cambio, combinación y comparación, lo que indica los diferentes niveles de complejidad del aprendizaje del conocimiento necesario para ser maestro.

En este sentido, nuestros resultados señalan que el aprendizaje del conocimiento sobre los tipos de problemas, su dificultad y las posibles maneras de resolverlos muestra diferente nivel de complejidad. En particular, pudimos identificar la dificultad que tuvieron los estudiantes para maestro en establecer relaciones entre los tipos de problemas, los niveles de dificultad y las estrategias usadas por los niños, cuando se analizan los problemas para tomar decisiones en la planificación de la enseñanza (Peltier, 2003). Al respecto, los resultados de Fennema *et al.* (1996) también han mostrado las dificultades a las que se enfrentan los maestros en ejercicio para tomar decisiones instruccionales basadas en una comprensión de la relación entre el desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos sobre la adición y la sustracción y los diferentes tipos de problemas.

Por último, los resultados de nuestro estudio nos llevan a considerar algunos aspectos que pudieron incidir en la manera como se produjo la instrumentalización de las ideas y en la manera en la que se pudo o no relacionar la categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, los niveles de dificultad y las estrategias de resolución durante el debate en línea. Estos aspectos son: las características de los participantes, la naturaleza de los tópicos de discusión, la manera de describir la tarea propuesta y el tipo de conocimientos que los estudiantes para maestro debían aprender.

LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Los estudiantes para maestro que participaron en esta investigación acababan de ingresar en el programa de formación inicial de maestros y, en consecuencia, los conocimientos, las experiencias y las maneras de aprender en la enseñanza primaria y secundaria pudieron estar condicionando su aprendizaje de tópicos

relativos a la Didáctica de la Matemática (Azcárate y Castro, 2006; Martínez y Gorgorio, 2004; Muñoz y Canillo, 2007). El alto porcentaje de unidades de significado de las categorías 1 y 2 (69% entre ambas) que se produjeron en el debate en línea es reflejo de que la mayoría de los discursos no se basaron en una “reflexión consciente” y argumentada de los problemas desde la información teórica proporcionada. En contraste, sólo 21% de unidades de significado (categoría 3) dan cuenta del aprendizaje logrado por los estudiantes para maestro. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Llinares y Valls (2007) y García *et al.* (2006) en investigaciones con estudiantes para maestro donde se describen diferentes maneras de usar la información teórica de la Didáctica de la Matemática en situaciones de resolución de problemas profesionales y la dificultad que ello conlleva. Tales resultados constatan, por un lado, lo difícil que resulta incidir en las estructuras de conocimiento previo de los estudiantes para maestro y, en especial, en aquellas ideas intuitivas e informales que han adquirido sobre la resolución de los PAE de estructura aditiva durante experiencias pasadas y, por otro lado, las implicaciones de tales conocimientos previos en el uso instrumental de la información teórica proporcionada en los programas de formación (Cos y Valls, 2006; Llinares, 2002).

LOS TÓPICOS DE DISCUSIÓN

Los tópicos de discusión han permitido distinguir tres cadenas (C_1 , C_2 y C_3) relacionadas con los apartados de la tarea propuesta y la cadena (C_4) cuya temática surgió en el transcurso del debate por iniciativa de los participantes. El análisis del contenido de los aportes al debate en línea mostró diferencias en el tipo de conocimiento usado para responder a la tarea. Mientras que los estudiantes para maestro fueron capaces de elaborar argumentos que reflejan un uso de la información teórica como instrumentos conceptuales durante la discusión de los tópicos vinculados con las preguntas de la tarea –la categorización semántica de los PAE de estructura aditiva, la dificultad de estos problemas y las posibles estrategias de resolución usadas por los niños–, éstos sólo reprodujeron conocimientos adquiridos en experiencias previas o información teórica de manera retórica para tratar el tópico surgido espontáneamente –la resolución de problemas y el aprendizaje de la adición y la sustracción–. En cierta medida, la identificación de las características de los problemas analizados desde las acciones y relaciones descritas en sus enunciados fue la clave para generar procesos de instrumentali-

zación de la información teórica (Llinares, 2002). Estos resultados son similares a los informados por Callejo, Llinares y Valls (2008) y Llinares y Valls (2007) en investigaciones previas con estudiantes para maestro y profesor de matemática, en el sentido de que los tópicos de discusión generados en debates en línea determinan la manera como se discute y, por tanto, cómo se pueden llegar a instrumentalizar las ideas de la Didáctica de la Matemática.

EL DISEÑO DE LA TAREA Y EL TIPO DE CONOCIMIENTO QUE SE APRENDE

Los argumentos producidos en las cadenas C_1 , C_2 y C_3 mostraron que los estudiantes para maestro fueron capaces de identificar distintos tipos de problemas, sus niveles de dificultad y las posibles estrategias de resolución desde una perspectiva semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa. Sin embargo, en general, estos conocimientos no fueron organizados en una red de ideas que sirviera para explicar las relaciones entre los distintos tipos de problemas de estructura aditiva, los niveles de dificultad y las posibles estrategias de resolución, como una manera de analizar los problemas. Consideramos que la ausencia de unidades de significado de la categoría 4 durante el debate en línea se pudo deber tanto a la manera cómo fue descrita la tarea de la sesión (en apartados) como al tipo de conocimientos que debían aprender los estudiantes para maestro. Este último aspecto tiene que ver con la complejidad que representa comprender y usar “holísticamente” las relaciones entre las características de los PAE en el desarrollo de la práctica de enseñar matemáticas y, en especial, durante la enseñanza de la adición y la sustracción en primaria, cuestión que se ve justificada en el tiempo que les tomó a los investigadores comprender estas relaciones (Carpenter *et al.*, 1988; Fennema *et al.*, 1996; Nesher, 1992; Vergnaud, 1994). Desde esta perspectiva, los resultados de nuestra investigación coinciden con las conclusiones de Carpenter *et al.* (1988), que mostraron que los maestros en ejercicio, a pesar de ser capaces de identificar con éxito distintos tipos de problemas de estructura aditiva y las estrategias usadas por sus alumnos cuando los resuelven, presentan dificultades para establecer relaciones entre estas ideas con el propósito de explicar, por ejemplo, la dificultad relativa de los problemas de adición y sustracción, razón por la cual estos conocimientos no fueron considerados por los maestros como relevantes para la toma de decisiones instruccionales.

Nuestros resultados señalan que el aprendizaje de las características de los PAE de estructura aditiva de una etapa puede producirse a lo largo de un debate

en línea y de diferentes maneras; sin embargo, existen factores inherentes a los participantes y al propio diseño de las tareas y los entornos de aprendizaje del que forman parte que parecen influir en el aprendizaje de los estudiantes para maestro de los tópicos de la Didáctica de la Matemática. Un aspecto que se ha revelado importante es el hecho de que, en el diseño de los entornos de aprendizaje, la incorporación de los debates en línea obliga a los estudiantes para maestro a escribir sus ideas y sus argumentos. El hecho de que los estudiantes tengan que expresar sus ideas por escrito y argumentarlas parece que los obliga a focalizar el discurso en la medida de sus posibilidades discursivas, argumentativas y de negociación de significados.

En este sentido, todavía es necesario seguir desarrollando este tipo de estudios para aumentar nuestra comprensión de la manera como se desarrolla durante los debates en línea el conocimiento necesario para enseñar matemáticas y conocer así, en mayor medida, las características de los factores que inciden en el aprendizaje de los estudiantes para maestro, a fin de impactar favorablemente en el diseño de futuros entornos para la formación de maestros.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto Precompetitivo I+D de la Generalitat Valenciana, GVPRE/2008/36 y el proyecto I+D del Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, España, EDU2008-04583.

Agradecemos a los revisores anónimos de la revista las sugerencias realizadas que han ayudado a mejorar la versión inicial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, P., A. Rodríguez y A. Rivero (2007), "Los profesores noveles de matemáticas ante el análisis de su práctica", *Investigación en la escuela*, núm. 61, pp. 37-51.
- Azcárate, P. y L. Castro (2006), "La evolución de las ideas profesionales y la reflexión: un binomio necesario", *Cuadrante*, vol. 15, núms. 1 y 2, pp. 33-64.
- Bairral, M. (2007), "Building a community of practice to promote inquiry about geometry: A study case of pre-service teachers interacting online", *Interactive Educational Multimedia* [en línea], núm. 14, en: <http://greav.ub.edu/iem/index.php?journal=iem>, [12 de marzo de 2008].

- Barberá, E. (coord.), A. Badia y J.M. Mominó (2001), *La incógnita de la educación a distancia*, Barcelona, ICE, Horsori.
- Bermejo, V. y M. Oliva (1987), "El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones", *Papeles del psicólogo* [en línea], núm. 32, en: <http://papelesdelpsicologo.es/imprimir.asp?id=347>, [6 de febrero de 2009].
- Bruno, A. y J. A. García (2004), "Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos", *Relime*, vol. 7, núm. 1, pp. 23-48.
- Callejo, M. L., S. Llinares y J. Valls (2008), "Using video-case and on-line discussion to learn to 'notice' mathematics teaching", en O. Figueras y A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter*, Morelia, Michoacán, Mexico, PME, vol. 2, pp. 233-240.
- Callejo, M. L., J. Valls y S. Llinares (2007), "Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional", *Investigación en la escuela*, núm. 61, pp. 5-21.
- Carpenter, T., E. Fennema y M. Franke (1996), "Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction", *Elementary School Journal*, vol. 97, núm. 1, pp. 3-20. [Carpenter, T., E. Fennema y M. Franke (1997), "Instrucción guiada cognitivamente: una base de conocimiento para la reforma de la enseñanza de matemáticas en primaria", *Revista EMA*, vol. 3, núm. 1, pp. 3-32.]
- Carpenter, T. P., E. Fennema, P. L. Peterson y D. Carey (1988), "Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, núm. 5, pp. 385-401.
- Carpenter, T. P., E. Fennema, P. L. Peterson, C. P. Chiang y M. Loef (1989), "Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study", *American Educational Research Journal*, vol. 26, núm. 4, pp. 499-531.
- Carpenter, T. P., J. Moser y T. Romberg (1982), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum.
- Castro, E. y E. Castro (1996), "Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa", en J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Granada, Comares, pp. 121-144.

- Castro, E., L. Rico y E. Castro (1995), *Estructuras aritméticas elementales y su modelación*, Bogotá, Una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cos, A. y J. Valls (2006), "Debates virtuales y concepciones de los estudiantes para maestro sobre resolución de problemas", *Zetetiké*, núm. 25, pp. 7-28.
- Cos, A., J. Valls y S. Llinares (2005), "Interaction in learning environments and learning to teach mathematics", en A. Méndez, J. A. Mesa, y J. Mesa (eds.), *Recent Research Developments in Learning Technologies*, Badajoz, España, pp. 776-779.
- Eraut, M. (1996), *Developing professional knowledge and competence*, Londres, The Falmer Press.
- Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. Jacobs y S. Empson (1996), "Learning to use children's thinking in mathematics instruction: A longitudinal study", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, núm. 4, pp. 403-434.
- García, M., V. Sánchez, I. Escudero y S. Llinares (2006), "The dialectic relationship between research and practice in mathematics teacher education", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 9, pp. 109-128.
- Hiebert, J., R. Gallimore y J. W. Stigler (2002), "A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one?", *Educational Researcher*, vol. 31, núm. 5, pp. 3-15.
- Hiebert, J., A. K. Morris, D. Berck y A. Jansen (2007), "Preparing teachers to learn from teaching", *Journal of Teacher Education*, vol. 58, núm. 1, pp. 47-61.
- Lin, P. J. (2005), "Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching", *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 3, núm. 3, pp. 351-377.
- Llinares S. (2002), "Participation and reification in learning to teach: The role of knowledge and beliefs", en G. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp.195-210.
- (2004), "La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en educación primaria", *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, vol. 36, pp. 93-115.
- Llinares, S. y K. Krainer (2006), "Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners", en A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 429-459.

- Llinares, S. y F. Olivero (2008), "Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. Technologies, interactions and new forms of discourse", en K. Krainer y T. Wood (eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, vol. 3. *Participants in mathematics teacher education. Individuals, teams, communities and networks*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 155-180.
- Llinares, S. y J. Valls (2007), "The building of pre-service primary teacher' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies", *Instructional Science*, doi: 10.1007/s11251-007-9043-4.
- Llinares, S., J. Valls y A. Roig (2008), "Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 3, pp. 31-54.
- Martínez, M. (2005), *Matemáticas para todos. Aportes para el desarrollo profesional de los maestros*, vols. 1 y 2, México, Comité Regional Norte de Cooperación con la Unesco.
- Martínez, M. y N. Gorgorio (2004), "Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado", *Revista Electrónica de Investigación Educativa* [en línea], vol. 6, núm 1, en: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/155/15506103.pdf>, [27 de noviembre de 2007].
- McGraw, R., K. Lynch, Y. Koc, A. Budak y C. Brown (2007), "The multimedia case as a tool for professional development: An analysis of on-line and face-to-face interaction among mathematics pre-service teachers, in-service teachers, mathematicians, and mathematics teacher educators", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 10, pp. 95-121.
- Mousley, J., D. Lambdin y Y. Koc (2003), "Mathematics teacher education and technology", en A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 395-432.
- Morris, A. K. (2006), "Assessing pre-service teachers' skills for analyzing teaching", *Mathematics Teacher Education*, vol. 9, núm. 5, pp. 471-505.
- Muñoz, M. C. y J. Carrillo (2007), "Conocimiento numérico de futuros maestros", *Educación Matemática*, vol. 19, núm 1, pp. 5-25.
- Nesher, P. (1992), "Solving multiplication word problems", en G. Leinhardt, R. Putnan y R. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Nueva Jersey, Hillsdale, pp. 189-219.
- Peltier, M. L. (2003), "Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 3, pp. 57-76.

- Penalva, M. C., I. Escudero y D. Barba (2006), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*, Granada, Proyecto Sur.
- Puig, L. y F. Cerdán (1988), *Problemas aritméticos escolares*, Madrid, Síntesis.
- Rey, C., M. C. Penalva y S. Llinares (2006), "Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: análisis de un caso", *Quadrante*, vol. 15, núms. 1 y 2, pp. 95-120.
- Socas, M., J. Hernández y A. Noda (1998), "Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 16, núm. 2, pp. 261-269.
- Strijbos, J., R. L. Martens, F. J. Prins y W. M. G. Jochems (2006), "Content analysis: What are they talking about?", *Computers and Education*, núm. 46, pp. 29-48.
- Tsamir, P. (2007), "When intuition beats logic: Prospective teachers' awareness of their same sides-same angles solutions", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 65, núm. 3, pp. 255-279.
- (2008), "Using theories as tools in mathematics teacher education", en D. Tirosh y T. Wood (eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, vol. 2. *Tools and processes in mathematics teacher education*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 211-234.
- Valls, J., M. L. Callejo y S. Llinares (2008), "Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de didáctica de las matemática", *Publicaciones*, núm. 38, pp. 89-103.
- Valls, J., S. Llinares y M. L. Callejo (2006), "Video-clips y análisis de la enseñanza: Construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas", en M. C. Penalva, I. Escudero y D. Barba (eds.), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas*, Granada, Proyecto Sur, pp. 25-43.
- Van Es, E. y M. G. Sherin (2002), "Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions", *Journal of Technology and Teacher Education*, vol. 10, núm. 4, pp. 571-596.
- Verillon, P. y P. Rabardel (1995), "Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity", *European Journal of Psychology of Education*, vol. 10, núm. 1, pp. 77-101.
- Vergnaud, G. (1994), "Multiplicative conceptual field: What and Why?", en G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, NY, State University of New York Press, pp. 41-59.

- (1997), *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas.
- Verschaffel, L. y E. de Corte (1996), "Number and arithmetic", en A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education. Part 1*, Países Bajos, Sense Publishers, pp. 99-138.
- Wenger, E. (2001), *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*, Madrid, Paidós.
- Wilson, S. M. y J. Berne (1999), "Teacher learning and the acquisition of professional knowledge: An examination of research on contemporary professional development", en A. Iran-Nejad y P. D. Pearson (eds.), *Review of Research in Education*, vol. 24, Washington, American Educational Research Association, pp.173-210.

DATOS DE LOS AUTORES

Juan Luis Prieto González

Departamento de Innovación y Formación Didáctica,
Universidad de Alicante, España
juanl.prietog@gmail.com

Julia Valls González

Departamento de Innovación y Formación Didáctica,
Universidad de Alicante, España
julia.valls@ua.es